Método da Secante Para Resolução de equações do tipo f(x)=0

Narã Vieira Vetter[1] **Guilherme Paiva Silva Santos**[2] **Rafael Pereira Marques**[3]

naranvetter@walla.com guilherme.pss@terra.com.br rp_marques5@yahoo.com.br

1 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

2 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

3 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta o método chamado de método da secante para a resolução de equações do tipo f(x)=0, resolver equações desse tipo significa obter as raízes reais de uma função, ou seja, o ponto onde a função é nula. Esse método utiliza uma estratégia parecida com a do método de Newton–Raphson para resolução da equação, o que o diferencia é a substituição da derivada por um quociente de diferenças. Para melhor visualização desse recurso, apresenta-se um exemplo de resolução de sistemas pelo método da secante. O algoritmo do método da secante é uma saída para o método de Newton em sistemas de equações cuja resolução da derivada exige uma elaboração maior. Isso muitas das vezes acarreta uma maior necessidade de tempo para execução do programa e resolução do sistema. Devido a isso o método da secante substitui a derivada por um quociente de diferença e torna mais rápida a convergência para raiz nesses casos. Trata-se de um sistema com uma seqüência de passos elementares para desenvolver um algoritmo para programação desse método, que necessita não de uma aproximação inicial como no método de Newton, mas de duas aproximações, uma vez que a reta secante corta a função em dois pontos, já a reta tangente utilizada no método de Newton corta a função em apenas um ponto. A ordem de convergência do método da secante não é quadrática como a do método de Newton, mas também não é apenas linear. Os critérios para convergência são os mesmos do método de Newton porém acrescenta-se que não seja aplicável devido a aproximação da derivada por um quociente de diferenças. O método da secante faz convergir para um valor x_{k+1} *tal que* $f(x_{k+1})$ *seja igual a zero, ou seja, a partir de um processo de iterações sucessivas e duas aproximações* x_{k-1} *e* x_k*, o ponto* x_{k+1} *é obtido como sendo a abscissa do ponto de interseção do eixo ox e da reta secante que passa por*$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ *e* $(x_k, f(x_k))$*. Ressalta-se que um programa em MatLab foi desenvolvido para solucionar os sistemas de equações propostos.*

Palavras-Chave: Método da secante. Sistemas não Lineares. Iterações. MatLab.

1 INTRODUÇÃO

Segundo CHAPRA e CANALE (2002) um problema em potencial ao se implementar o método de Newton-Raphson é a necessidade de se obter a derivada da função avaliada. Embora isso não seja inconveniente para funções polinomiais e muitas outras, existem funções das quais a derivada é extremamente difícil ou inconveniente de se calcular. Para casos assim, a derivada é substituída por um quociente de diferença. Assim é o método da secante, uma aproximação do método de Newton, ao invés de se utilizar a derivada na função de iteração, utiliza uma razão incremental, o que leva a necessidade de duas aproximações iniciais.

Trata-se de um sistema com a seguinte seqüência de passos :

a) Definir a função a ser avaliada;
b) Definir a faixa onde se quer pesquisar as raízes;
c) Verificar se nesta faixa há pelo menos uma raiz real, isso se verifica se nesse intervalo a função vai de valores positivos para negativos ou vice-versa;
d) Definir as aproximações iniciais;
e) Verificar condições de convergência;
f) Fazer iterações com o algoritmo do método da secante até que haja convergência.

2 OBJETIVOS

- Desenvolver programação em MatLab;
- Aprender um novo método para resolução de Sistemas não lineares;
- Elaborar um programa com método *da Secante* que resolva os sistemas propostos.

3 TÉCNICA DO MÉTODO DA SECANTE

Visto que o método da secante é uma aproximação do método de Newton–Raphson, o que o diferencia é a substituição da derivada por um quociente de diferença, não é difícil obter a função de iteração.

Do método de Newton–Raphson temos que:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (1)$$

Para a aproximação da derivada temos que:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad (2)$$

Onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para raiz.

Então a função de iteração para o método da secante fica:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \qquad (3)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad (4)$$

Desta forma definimos a seguinte função de iteração para o método da secante:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad (5)$$

3.1 Interpretação Geométrica

A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k, o ponto x_{k+1} é obtido como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo ox e da reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$. A reta secante passando pelas aproximações iniciais x0 e x1 intercepta o eixo ox em x2, que é a primeira estimativa para raiz. O valor x2 buscado na função e verificado se torna a função nula nesse ponto, conforme Figura 1. Não satisfazendo esta condição, é necessário fazer mais iterações, e isso é feito até que se verifique que um valor de x torne a função nula.

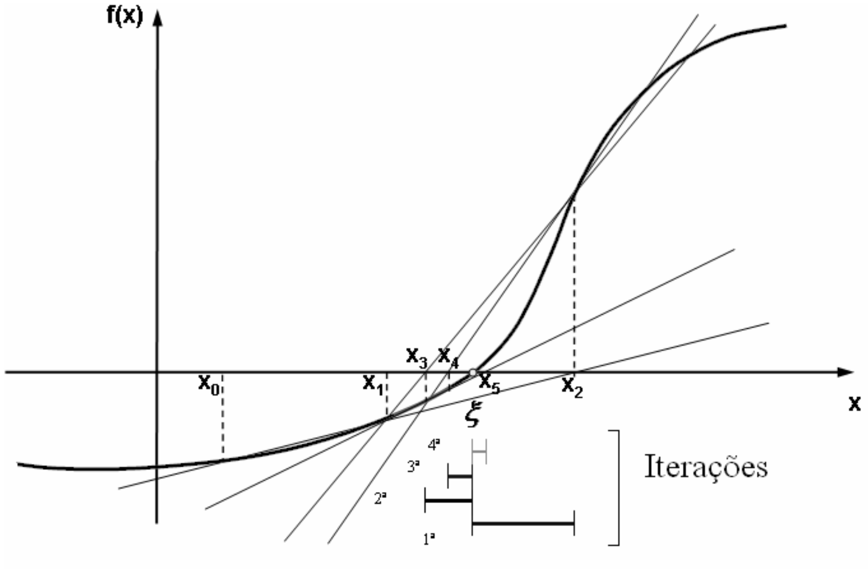

Figura 1.**Gráfico da técnica do método da secante**

3.2 Obtenção da Função de Iteração pela Interpretação Geométrica

Graficamente temos a função cortada pela reta secante, e fazendo as considerações geométricas temos que dois triângulos semelhantes são formados na Figura 2.

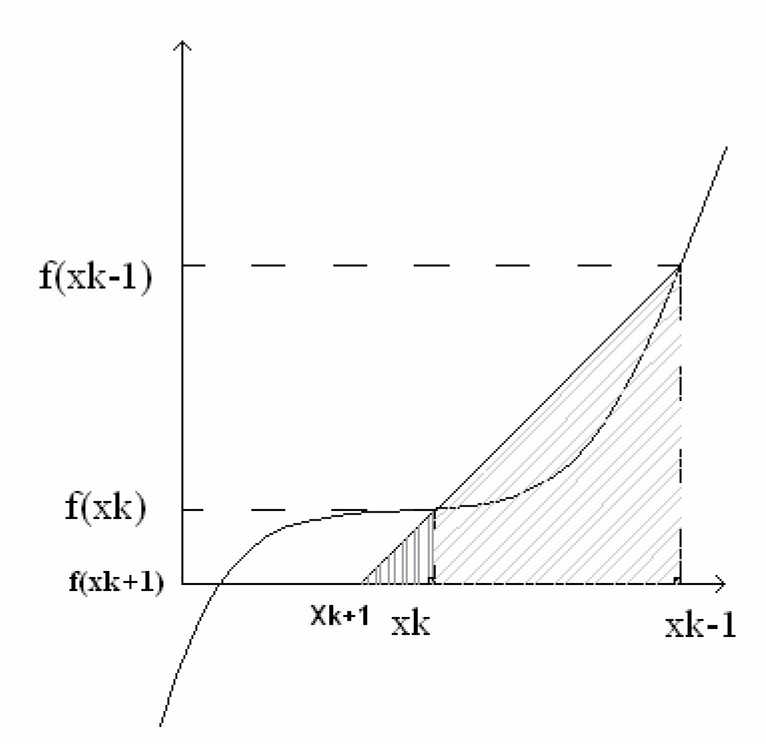

Figura 2. **Interpretação geométrica da função de iteração**

Pela semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{f(x_{k-1})}{f(x_k)} = \frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \qquad (6)$$

$$f(x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) = f(x_k)(x_{k-1} - x_{k+1}) \qquad (7)$$

$$f(x_{k-1})x_k - f(x_{k-1})x_{k+1} = f(x_k)x_{k-1} - f(x_k)x_{k+1} \qquad (8)$$

Desta forma chegamos a seguinte função de iteração:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad (9)$$

De modo que o método da secante é uma aproximação para o método de Newton, as condições para convergência do método são praticamente as mesmas, porém acrescenta-se que não seja aplicável e que o método pode divergir se $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.

A ordem de convergência do método da secante não é quadrática como a do método de Newton, mas também não é apenas linear.

Sendo assim, podemos dizer que o objetivo principal do método da secante é fazer iterações para encontrar um valor x tal que f(x) = 0.

4 ALGORITMO PARA PROGRAMAÇÃO EM MATLAB

Passo 1

Dados iniciais:

i) x0 e x1: aproximações iniciais;
ii) ξ : precisão;

Passo 2

Condição para execução do programa

i) Como o método pode divergir se $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$ criamos uma estrutura para impedir esta indeterminação.
ii) Se $|x_0| = |x_1|$ pare, não execute as iterações.

Passo 3

i) Iter = 1
ii) Número máximo de iterações
iii) errof = valor absoluto $(x_1 - x_0)$

Passo 4

i) Enquanto $|Errof| > \xi$ faça $x_2 = \dfrac{f(x_{x1})x_0 - f(x_0)x_1}{f(x_1) - f(x_0)}$; (10)
ii) erro $= x_2$;
iii) errof = valor máximo absoluto (erro-x_1);
iv) iter = iter+1;

Passo 5

i) x0 = x1 e x2=x1;
ii) Volte ao passo 4

Passo 6

Como o programa busca as raízes reais de uma função, e algumas funções podem não ter raízes reais, o programa pode executar iterações infinitamente, para que isso não ocorra é preciso estabelecer um número máximo de iterações.

i) Se iter = número máximo de iterações, pare o método está divergindo;
ii) Verifique se a função possui raízes reais;

Passo 7

i) Quando $|Errof| <= \xi$ imprima x_2 (a raiz real da função);
ii) Imprima o número de iterações (iter-1);
iii) FIM

4.1 Exemplo Resolvido

Consideremos $f(x) = x^2 + x - 6$

Passo 1

Aproximações iniciais: x0 = 1.5 e x1= 1.7
Precisão: $\xi = 0{,}01$
Iter = 1

Passo 2

Enquanto $|Errof| > \xi$ fazer iterações
erro= x1 = 1,7
errof = x1-x0 = 1,7-1,5 = 0,2
$|Errof| > \xi$

Primeira iteração:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \tag{11}$$

$$x_2 = \frac{1{,}5(-1{,}41) - 1{,}7(-2{,}25)}{-1{,}41 + 2{,}25} = 2{,}03571 \tag{12}$$

Passo 3

erro = 2,03571
errof = 2,03571-1,7 = 0.33571
$|Errof| > \xi$

Segunda iteração:

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_0)} \tag{13}$$

Cálculo $f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= (2{,}03571)^2 + 2{,}03571 - 6 \\ f(x_2) &= 0{,}17983 \end{aligned} \tag{14}$$

$$x_3 = \frac{1{,}7(0{,}17983) - 2{,}03571(-1{,}41)}{0{,}17983 + 1{,}41} = 1{,}99774 \qquad (15)$$

Passo 4

erro = 1,99774
errof = 1,99774 – 2,03571 = -0,03797
$|Errof| > \xi$

terceira iteração:

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \qquad (16)$$

Cálculo $f(x_3)$

$$\begin{aligned} f(x_3) &= (1{,}99774)^2 + 1{,}99774 - 6 \\ f(x_3) &= -0{,}01131 \end{aligned} \qquad (17)$$

$$x_4 = \frac{(2{,}03571)(-0{,}01131) - (1{,}99774)(0{,}17983)}{-0{,}01131 - 0{,}17983} = 1{,}99999 \qquad (18)$$

Passo 5

erro = 1,99999
errof = 1,99999 – 1,99774 = 0,00225
$|Errof| < \xi \rightarrow$ raiz encontrada

Passo 6

Imprimir resultados
Valor convergido: 1,99999
Número de iterações: 3

O valor de uma das raízes da função é 2 a convergência para o valor 1,99999 foi devido à precisão. Aumentando-se a precisão o valor convergido seria 2.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o algoritmo para resolução de equações do tipo f(x)=0 usando o método da *secante*. Deste modo, solucionamos o problema da determinação da raiz real proposto, através de um programa desenvolvido em MatLab. Percebemos que através deste método podemos determinar uma raiz real de uma função, ou seja, através de iterações sucessivas utilizando a função de iteração do método da secante podemos encontrar um valor para x tal que f(x) seja nulo.

Vale ainda ressaltar algumas considerações importantes:

O método da secante é uma saída para o método de Newton quando se quer escapar do cálculo da derivada. Em comparação com o método de Newton, isso o torna melhor? Às vezes sim e às vezes não, para a comparação devemos levar em conta os principais critérios de avaliação: garantias de convergência, rapidez de convergência e esforço computacional.

Observamos que o único dado que o programa nos fornece quanto a sua eficiência é o número de iterações efetuadas, o que não nos permite tirar conclusões sobre o tempo de execução do programa, pois o tempo gasto a cada iteração varia de método para método, de função para função e de aproximação para aproximação.

O esforço computacional é medido através do número de operações efetuadas a cada iteração, da complexibilidade destas operações, do número de decisões lógicas, do número de avaliações de função a cada iteração e do número total de iterações. Tendo isso em mente, percebe-se que é difícil tirar conclusões gerais sobre a eficiência computacional de um método em relação a outro. Por exemplo, apesar do método de Newton Raphson requerer cálculos mais elaborados, porque exige o cálculo da função e da derivada a cada iteração, ele pode convergir com um número menor de iterações em relação ao método da secante.

Considerando que o método ideal seria aquele em que a convergência estivesse assegurada, a ordem de convergência fosse alta e os cálculos por iterações fossem simples, o método de Newton é o mais indicado sempre que for fácil verificar as condições de convergência e que o cálculo da derivada não seja muito elaborado. Nos casos em que é trabalhoso obter e/ou avaliar a derivada, é aconselhável utilizar o método da secante visto que este converge mais rapidamente que outros métodos. Outro detalhe importante na escolha é o critério de parada, pois se o objetivo for reduzir o intervalo que contém a raiz, não se deve usar o método da secante que apesar de trabalhar num intervalo, pode não atingir a precisão requerida.

Após estas considerações, podemos concluir que a escolha do método está diretamente relacionada com a equação que se quer resolver, no que diz respeito ao comportamento da função na raiz exata, às dificuldades com o cálculo da derivada, ao critério de parada, entre outros. Apesar do método de Newton apresentar condições mais restritas para convergência, ele pode ser mais rápido uma vez que estas condições são satisfeitas. Finalizamos lembrando que o método da secante depois do de Newton é que apresenta mais rapidez de convergência.

REFERÊNCIAS

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Numerical methods for engineers: international edition. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

KREYSZIG, Erwin. Advanced engineering mathematics. 8. ed. Indianapolis: Wiley & Sons, 1999.

RUGGIERO, M. A. G. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1996.

SOUZA, M.J.F. Departamento de computação,UFOP. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone>. Acesso em: 01 ago. 2006.

QUEIROZ, B.C.N. Departamento de sistemas e computação – (CCT),UFCG. Disponível em: < http://www.dsc.ufcg.edu.br/site/pesquisa.php>. Acesso em: 01 ago. 2006.